Neuere Ergebnisse der Theorie der linearen Wechselstromschaltungen[1]).

Von

W. Cauer, Berlin.

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Mix & Genest AG.)

(Eingegangen am 11. 5. 1940.)

DK 621.392.5

Übersicht. Die praktische Tragweite und die Ziele der Theorie der linearen Wechselstromschaltungen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit werden an einigen neueren praktischen und theoretischen Ergebnissen dieser Theorie erläutert.

Es soll hier versucht werden, an Hand einiger charakteristischer Beispiele einen gewissen Einblick in die praktische Tragweite der Theorie der linearen Wechselstromschaltungen (Netzwerke) zu geben. Beispiele rein schaltungstheoretischer Sätze, die sich ohne Formelapparat aussprechen lassen, sollen einen Eindruck von den Fragen vermitteln, die den Gegenstand der Theorie bilden. Diese befaßt sich mit sog. linearen Schaltungsproblemen. In ihrem Mittelpunkt stehen Fragen nach dem Entwurf von solchen Schaltungen (z. B. passiven Zweipolen, Vierpolen usw.) aus Induktivitäten, Gegeninduktivitäten, ohmschen Widerständen und Kapazitäten, deren Verhalten nach außen hin bei rein periodischem Wechselstrom in vorgeschriebener Weise von der Frequenz des Wechselstromes abhängt. Die vierpoligen Filter und Frequenzweichen der Trägerfrequenztechnik sind dafür ein Beispiel, dessen Wichtigkeit aus dem verhältnismäßig großen Kostenanteil der Siebnetzwerke bei Trägerfrequenzanlagen hervorgeht. Auch zweipolige oder vierpolige Kabelnachbildungen, Entzerrungsnetzwerke, Phasen- oder Laufzeit-Ausgleichsschaltungen oder Verzögerungsschaltungen und allgemeiner alle Schaltungen mit vorgeschriebenem Dämpfungs- oder Phasengang oder mit vorgeschriebenem Einschwingverhalten gehören in den Bereich der hier zu erörternden Theorie.

Der Elektrotechniker ist gewohnt, sich das Verhalten von sinusförmigen elektrischen Strömen i, Spannungen u und daraus abgeleiteten Größen, wie z. B. Scheinwiderständen Z durch komplexe Zahlen (z. B. U, I) in Form von Vektordiagrammen zu veranschaulichen. Ist $i = \Re\,(I\,e^{j\omega t})$[2]), $u = \Re\,(U\,e^{j\omega t})$, so ist der Scheinwiderstand erklärt durch $Z = U/I$. U, I oder Z kann man sich als Radiusvektor vom Nullpunkt aus auftragen. Sind in dem betrachteten elektrischen Apparat (Transformator, Maschine, Schaltung) gewisse Parameter veränderlich, so wandert der Endpunkt des Vektors auf einer Kurve, „Ortskurve" genannt. Ist z. B. bei einem Transformator der veränderliche Kurvenparameter der Betrag des sekundären Belastungswiderstandes, der als von konstanter Phase angenommen sei, so erhält man für die Endpunkte der Vektoren für den primären Strom und die primäre Spannung die bekannten Kreisdiagramme. In den uns hier interessierenden Fällen ist der Ortskurvenparameter stets die Frequenz. Es zeigt sich nun, daß eine solche kurvenmäßige Veranschaulichung des Frequenzverhaltens von Schaltungen, bei denen die Frequenz alle möglichen reellen Werte durchläuft, nicht ausreicht, um einen guten Einblick in die Natur der hier aufgeworfenen Fragen zu erhalten. Vielmehr ist es notwendig, auch komplexe Werte der Kreisfrequenz ω zu betrachten. Zweckmäßig bedient man sich dabei des komplexen Frequenzparameters $\lambda = j\omega$, der für reelle Frequenzen rein imaginäre Werte annimmt. Das hat z. B. den Vorteil, daß der Scheinwiderstand einer Zweipolschaltung

[1]) Vortrag, gehalten am 5. 3. 1940 im VDE Bezirk Berlin.

[2]) $\Re$ bedeutet „reeller Teil".

eine rationale Funktion von λ mit reellen Koeffizienten wird. Daß es zweckmäßig ist, die bei Schaltungen vorkommenden Funktionen der Frequenz auch für allgemeine komplexe Werte des Frequenzparameters λ zu untersuchen, soll an zwei sinnfälligen Beispielen klar gemacht werden.

Breitbandverstärker, d. h. Verstärker, die ein weites Frequenzband, das mehrere Gespräche oder Programme umfaßt, verstärken sollen, linearisiert man durch das Mittel der Gegenkopplung (Gegenkopplungsnetzwerk G in Bild 1a), um die Intermodulation, d. h. nichtlineare Beeinflussung der verschiedenen Gespräche oder Programme weitgehend zu unterdrücken. Die starke Gegenkopplung bringt eine wesentliche Erhöhung der tatsächlichen Verstärkung gegenüber der ausnutzbaren Verstärkung und damit eine große Erhöhung der Pfeifneigung mit sich. Für den Bau derartiger Vertärker ist daher die genaue Kenntnis der Bedingungen, unter denen ein solcher Verstärker schwingt, Voraussetzung. Es gibt dafür ein einfaches anschauliches Ortskurvenkriterium[1]). Bezeichnen wir als „Rückkopplungsfaktor" $w = U_2/U_1$ den Faktor, mit dem sich eine Spannung U_1 bei einem vollständigen Kreislauf über den Verstärker und das Gegenkopplungsnetzwerk multipliziert, wenn man den zweiadrigen Rückkopplungsweg an einer Stelle aufschneidet (Bild 1a) und am Ende (2) mit dem betriebsmäßigen Scheinwiderstand abschließt. Man betrachte nun

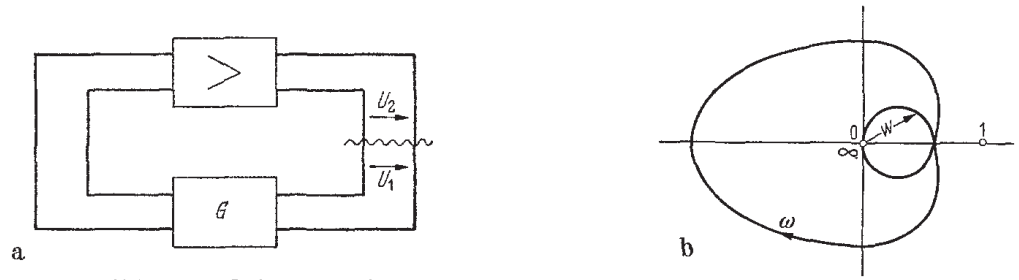


Bild 1a und b. Schwingstabilität eines gegengekoppelten Verstärkers.

die Ortskurve $w(\lambda)$ für alle rein imaginären Werte von λ. Für einen dreistufigen Verstärker, bei dem jede Stufe mit der folgenden und die letzte mit der ersten durch eine gleichartige Widerstands-Kondensator- oder Resonanzkreisschaltung gekoppelt ist, ergibt sich z. B. eine Kurve vom Typus der im Pfeilsinne durchlaufenden Kurve Bild 1b. Das Kriterium der Schwingstabilität im Sinne der Stabilität gegenüber dem Aufschaukeln zufälliger kleiner äußerer Störungen lautet nun einfach: Der Punkt $w=1$ muß außerhalb der Ortskurve des Rückkopplungsfaktors liegen. Andererseits läßt sich zeigen, daß die proportional $\Re e^{\lambda_\nu t}$ verlaufenden Eigenschwingungen des als lineares System betrachteten gegengekoppelten Verstärkers als „charakteristische Exponenten" λ_ν die Wurzeln der Gleichung $w-1=0$ besitzen. Danach ist mit Schwingstabilität gleichwertig: Die Nullstellen von $w-1$ müssen alle negativ reellen Teil haben. Tatsächlich besagt das angeführte Ortskurvenkriterium mathematisch gar nichts anderes. Der Zusammenhang wird vermittelt durch folgenden Satz der Funktionstheorie: Ist $w=f(z)$ in einem von einer Kurve $\mathfrak{C}$ berandeten abgeschlossenen Bereich B der z-Ebene in Komplexen differenzierbar und auf $\mathfrak{C}$ von Null verschieden, so ist die Anzahl der im Innern von B gelegenen Nullstellen von f gleich der Windungszahl der Bildkurve von $\mathfrak{C}$ („Ortskurve") in der w-Ebene um den Nullpunkt (dabei wird angenommen, daß $\mathfrak{C}$ so durchlaufen wird, daß B zur Linken bleibt).

Eine Anwendung dieses Satzes auf den Fall, daß $f(z)$ eine ganze rationale Funktion und $\mathfrak{C}$ ein Kreis um den Nullpunkt ist, liefert in Verbindung mit einer Maschine, die die Bildkurve von $\mathfrak{C}$ mechanisch rasch aufzuzeichnen gestattet[2]), ein

[1]) H. Nyquist, Bell. Syst. techn. J. 11 (1932) S. 126.

[2]) Eine solche Maschine wurde von R. L. Dietzold u. R. O. Mercner, Bell Records 1937, beschrieben; vgl. auch A. Walther, ETZ 61 (1940) S. 33.

bequemes Mittel zur Auffindung auch komplexer Wurzeln von algebraischen Gleichungen höheren Grades. Die Lösungsverfahren vieler Schaltungsaufgaben der erwähnten Art enthalten gerade die Bestimmung der Nullstellen gewisser algebraischer Gleichungen als den zeitraubendsten Teil der numerischen Rechnung, der sich durch keine Tabellen- und Kurvensammlung od. dergl. beseitigen läßt.

Ein anderes Beispiel, das den Nutzen der Untersuchung der Frequenzfunktionen für komplexe Werte des Frequenzparameters erkennen läßt, ist die Berechnung des Imaginärteiles eines Scheinwiderstandes $I(Z)$ aus seinem Realteil $R(Z)$. Unter der Voraussetzung, daß der Scheinwiderstand für alle reellen Frequenzen endlich bleibt,

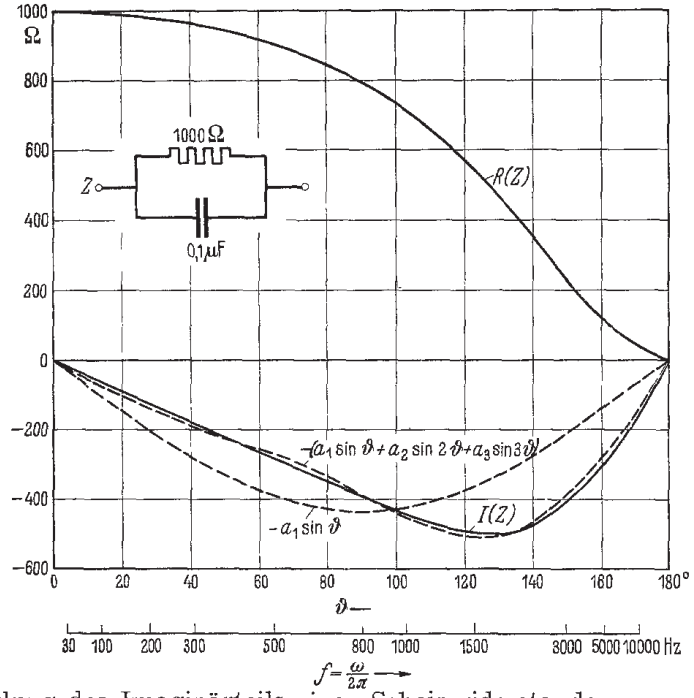


Bild 2. Ermittlung des Imaginärteils eines Scheinwiderstandes aus seinem Realteil.

$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2\pi \cdot 800},$$

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 \cos\vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + a_3 \cos 3\vartheta + \cdots \\ \quad -\mathrm{j}\,(a_1 \sin\vartheta + a_2 \sin 2\vartheta + a_3 \sin 3\vartheta + \cdots) \end{array} \right\}$$
$$= R(Z) + \mathrm{j}\, I(Z).$$

was darauf hinausläuft, daß $Z(\lambda)$ auf der ganzen imaginären λ-Achse im Komplexen differenzierbar ist, ist $I(Z)$ durch den Verlauf von $R(Z)$ zwischen $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ eindeutig bestimmt. Ein einfaches Berechnungsverfahren ergibt sich durch Einführung des neuen Frequenzparameters $\vartheta = 2 \operatorname{arctg} k\omega$ (k positive Konstante) an Stelle der Kreisfrequenz. Man entwickelt den Realteil in eine Fourier-Reihe nach $\cos \nu\vartheta$. Dann ist der Imaginärteil einfach eine Fourier-Reihe nach $\sin \nu\vartheta$ mit entgegengesetzt gleichen Fourier-Koeffizienten[1]). In Bild 2 ist dies Verfahren an dem Beispiel eines Zweipols erläutert, der aus einer Parallelschaltung eines ohmschen Widerstandes und einer Kapazität besteht.

Die Theorie wird nicht nur die Frage der Beziehung zwischen Real- und Imaginärteil eines Scheinwiderstandes zu beantworten haben, sondern vor allem die grundsätzliche Frage: Welche Funktionen von λ sind als Scheinwiderstandsfunktionen (mit endlich vielen „toten" Schaltelementen) realisierbar? Für Zweipole aus endlich vielen Induktivitäten, Gegeninduktivitäten und Kapazitäten (endliche Reaktanzzweipole) gibt Bild 3a darauf eine anschauliche Antwort. Eine Schaltung dieser Struktur hat bei passender Bemessung der Schaltelemente dieselbe Scheinwiderstandsfunktion wie irgendein vorgegebener endlicher Reaktanzzweipol, d. h. ist zu

[1]) Die nähere Begründung findet man bei W. Cauer, Elektr. Nachr.-Techn. 17 (1940) S. 17.

ihm äquivalent (allgemein nennt man zwei Schaltungen „äquivalent", wenn sie in ihrem Verhalten nach außen hin sich für keine Frequenz unterscheiden). Die „Partialbruchschaltung" Bild 3a hat einen Scheinwiderstand der Form

$$\frac{a_0}{\lambda} + \sum \frac{a}{\lambda^2 + b_\nu} + a_\infty \lambda$$

mit positiven a und b. Von solcher Art sind also die endlichen Reaktanzfunktionen. Man könnte nun vermuten, daß die Verhältnisse bei einem endlichen Zweipol mit

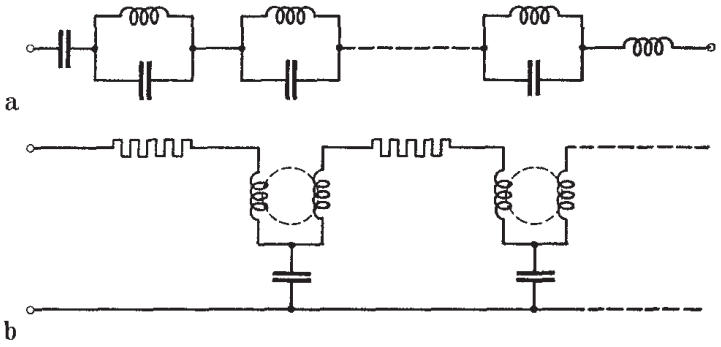


Bild 3a und b. Zweipol-Schaltungen.

allen drei Widerstandsarten ähnlich liegen, daß z. B. zu jedem solchen Zweipol ein Zweipol äquivalent wäre, der aus Bild 3a dadurch hervorgeht, daß man mit jeder Spule einen ohmschen Widerstand in Reihe und zu jedem Kondensator einen Wider-

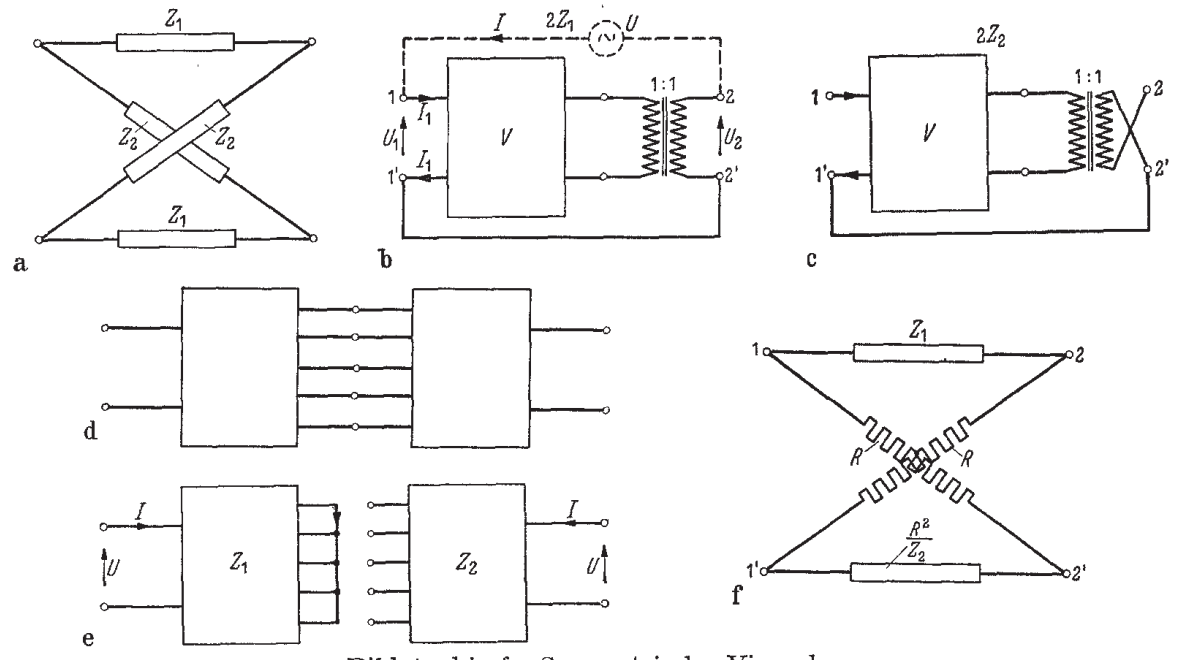


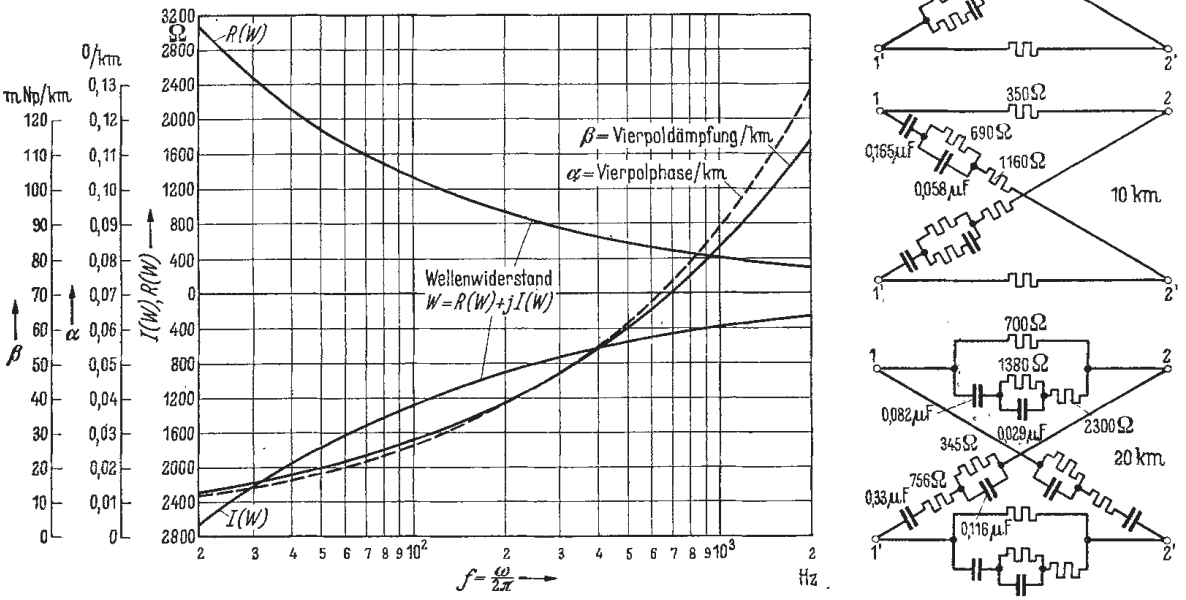
Bild 4a bis f. Symmetrische Vierpole.

stand parallel schaltet. Die Verhältnisse liegen aber hier verwickelter. Eine Schaltungsstruktur, die bei Einschluß gewisser Grenzfälle zu jedem endlichen Zweipol äquivalent gemacht werden kann, zeigt Bild 3b[1]), [2]).

Dem Begriff der Äquivalenz steht derjenige der Dualität (Widerstandsreziprozität) gegenüber. Zwei Zweipole heißen dual, wenn der Leitwert (Z^{-1}) des einen (bis auf einen positiven konstanten Faktor) mit dem Scheinwiderstand des anderen übereinstimmt. Zwei Vierpole heißen dann dual, wenn die Kurzschlußleitwerte des einen den Leerlaufwiderständen des anderen proportional sind, usw.

[1]) Hier und in den folgenden Abbildungen deutet ein gestrichelter Kreis feste Kopplung an.
[2]) O. Brune, J. Math. Phys. 10 (1931) Nr. 3.

Ein wichtiges weiteres Beispiel von Äquivalenz ist in Bild 4 dargestellt. Jeder symmetrische Vierpol V, d. h. jeder Vierpol, bei dem eine Vertauschung von Eingangs- und Ausgangsklemmenpaar sich nach außen hin elektrisch nicht bemerkbar macht, ist äquivalent zu dem Kreuzglied Bild 4a[1]). Mögliche Zweipole mit Scheinwiderständen Z_1 und Z_2 ergeben sich allgemein aus Bild 4b und c, im Sonderfall[2]), daß der symmetrische Vierpol auch der Struktur nach symmetrisch ist (Bild 4d), aus Bild 4e. Der Sonderfall wird häufig mit dem allgemeinen Fall verwechselt. Ziemlich bekannt sind die zum Kreuzglied äquivalenten, einen idealen Übertrager enthaltenden Sparbrückenschaltungen, in denen Z_1 und Z_2 nur einmal vorkommt. Etwas weniger bekannt ist die Schaltung Bild 4f, in der zwei Brückenzweige den Widerstand R enthalten, der dem als ohmisch und gleich groß angenommenen Generator- und Abschlußwiderstand gleich ist, ein dritter Brückenzweig den Scheinwiderstand Z_1 und der vierte Brückenzweig einen zum



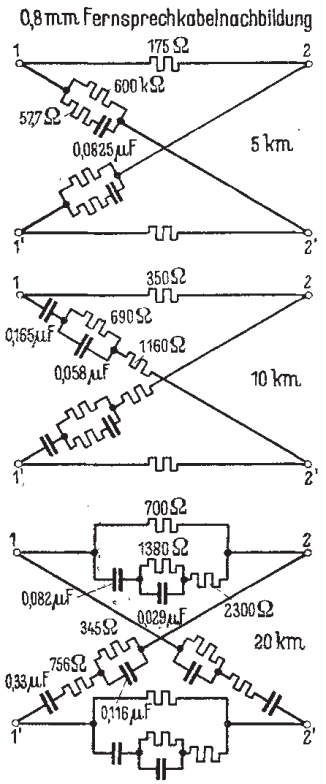


Bild 5. Fernsprechkabelnachbildung.

Zweipol mit Scheinwiderstand Z_2 dualen Zweipol enthält. Die Schaltung Bild 4f ist zwar nicht äquivalent zum Kreuzglied, besitzt aber unter der Annahme gleich großen ohmschen Generator- und Abschlußwiderstandes, abgesehen von einer zusätzlichen positiven Konstanten ln 2, dasselbe Betriebsübertragungsmaß, also eine nur um die Konstante ln 2 größere Betriebsdämpfung und dieselbe Betriebsphase als Funktion der Frequenz wie jenes[3]). Unter Betriebsübertragungsmaß eines Vierpoles wird dabei allgemein, wie üblich, der halbe natürliche Logarithmus aus einem Leistungsverhältnis verstanden, in dessen Zähler diejenige Scheinleistung steht, die der Generator an einen dem Generatorwiderstand gleichen Scheinwiderstand abgibt, und dessen Nenner diejenige Scheinleistung ist, die vom gleichen Generator unter Zwischenschaltung des Vierpoles an den Verbraucher abgegeben wird.

Als Anwendungsbeispiele sind in Bild 5 vierpolige Kabelabschnitte verschiedener Längen l durch ein einziges Kreuzglied vierpolig nachgebildet, und zwar für den Frequenzbereich bis 300 Hz. Der eben erwähnte Äquivalenzsatz gestattet die Aufgabe, die in dem Bild dargestellten Vierpoleigenschaften (Vierpoldämpfung A_1 bzw. βl und phase B_1 bzw. αl, Wellenwiderstand W) durch eine Nachbildungsschaltung

[1]) W. Cauer, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. Dez. 1927.
[2]) A. C. Bartlett, Philos. Mag. IV, Nov. (1927) S. 902 und O. Brune, Philos. Mag. Ser. 7, XIV, Nov. (1932) S. 806.
[3]) S. Darlington, U. S. Patent 1991195.

zu verwirklichen, auf entsprechende Zweipolaufgaben für die Scheinwiderstände Z_1 und Z_2 zurückzuführen, wobei die vorher besprochenen Ergebnisse über die realisierbaren Scheinwiderstandsfunktionen[1]) mit Vorteil benutzt werden können[2]). — Für irgendeinen symmetrischen Vierpol wird W als Scheinwiderstand einer unendlich langen Kette aneinandergereihter gleicher Vierpole, $e^{A_1 + jB_1}$ als Spannungs- oder Stromverhältnis an zwei aufeinanderfolgenden Verbindungsstellen einer solchen Kette erklärt.

Als weiteres Beispiel eines symmetrischen Vierpoles vorgeschriebenen Frequenzverhaltens ist in Bild 6 ein Bandfilter mit sog. Tschebyscheffschem Verhalten der

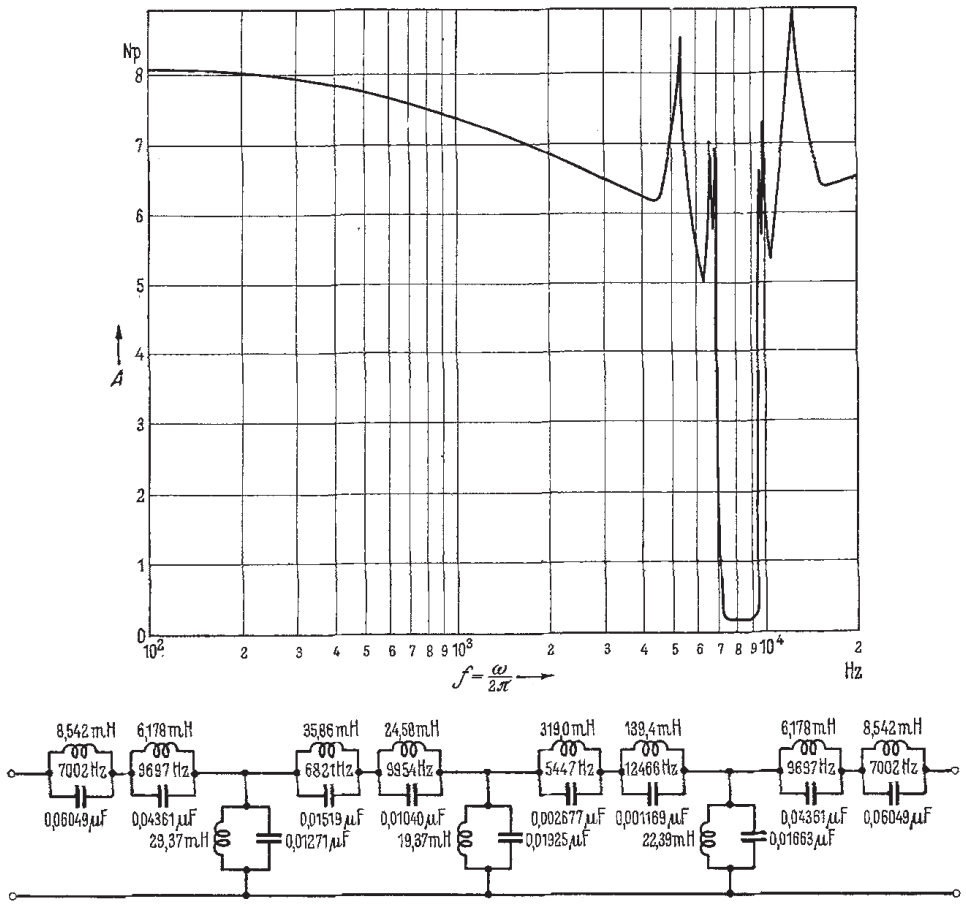


Bild 6. Bandfilter mit Tschebyscheffscher Vierpoldämpfung.

$R = 6000\,\Omega$, Garantiedämpfung 5,0 Neper, Wellenwiderstandsschwankung 15%, Durchlaßgrenzen 7180 Hz, 9460 Hz, Sperrgrenzen 7010, 9670 Hz.

Vierpoldämpfung dargestellt. Die Ordinate stellt die bei einem Abschlußwiderstand von 6000 Ω gemessene Betriebsdämpfung dar. Der Berechnung sind Wellenwiderstand und Vierpoldämpfung zugrunde gelegt. Die Dimensionierung ist so vorgenommen, daß dem Schaltmittelaufwand (der Filterklasse) entsprechend oberhalb und unterhalb vorgegebener Frequenzen in der Nachbarschaft des Durchlaßbandes (der Sperrgrenzen) die Vierpoldämpfung möglichst große Minimalwerte (im Beispiel 5,7 Neper) aufweist (Tschebyscheffsches Verhalten). Den Ausgangspunkt für die Berechnung bildet zwar wieder das Kreuzglied. Für die praktische Ausführung ist aber als geeigneter eine äquivalente Kettenschaltung gewählt worden. Auf die Möglichkeit, Kreuzgliedfilter mit beliebig vorgegebener Vierpoldämpfung, also auch Tschebyscheff-

[1]) Vgl. Fußnote 2, S. 692.

[2]) Mehr Einzelheiten über derartige Kabelnachbildungen findet man bei V. Fetzer, Mix & Genest Nachr. 11 (1939) H. 1, S. 65.

scher Vierpoldämpfung, in äquivalente Kettenschaltungen umzuwandeln, wurde schon 1934 hingewiesen[1], [2].

Die Theorie gestattet, über den Rahmen der Filteraufgaben hinaus, bei denen ein gewisser Frequenzbereich möglichst gesperrt, der komplementäre möglichst durchgelassen werden soll, die allgemeinere Aufgabe mit jeder gewünschten Genauigkeit zu lösen, eine als beliebige stetige Kurve in einem Frequenzintervall gegebene Funktion durch einen Reaktanzvierpol als Betriebsdämpfung A oder Leerlaufdämpfung A_0 anzunähern[3]. Im ersten Fall wird noch angenommen, daß die Kurve nur im Positiven verläuft. Im zweiten Fall hat man unter Leerlaufdämpfung den natürlichen Logarithmus des Betrages eines Spannungsverhältnisses zu verstehen, in dessen Zähler die EMK des Generators mit konstantem ohmschen Widerstand und in dessen Nenner die Leerlaufspannung am Ausgang des Reaktanzvierpoles steht. Diese hat man sich am Gitter eines nachfolgen-

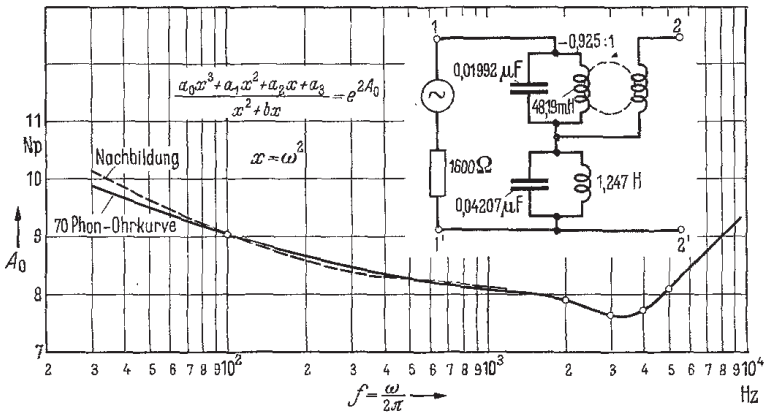
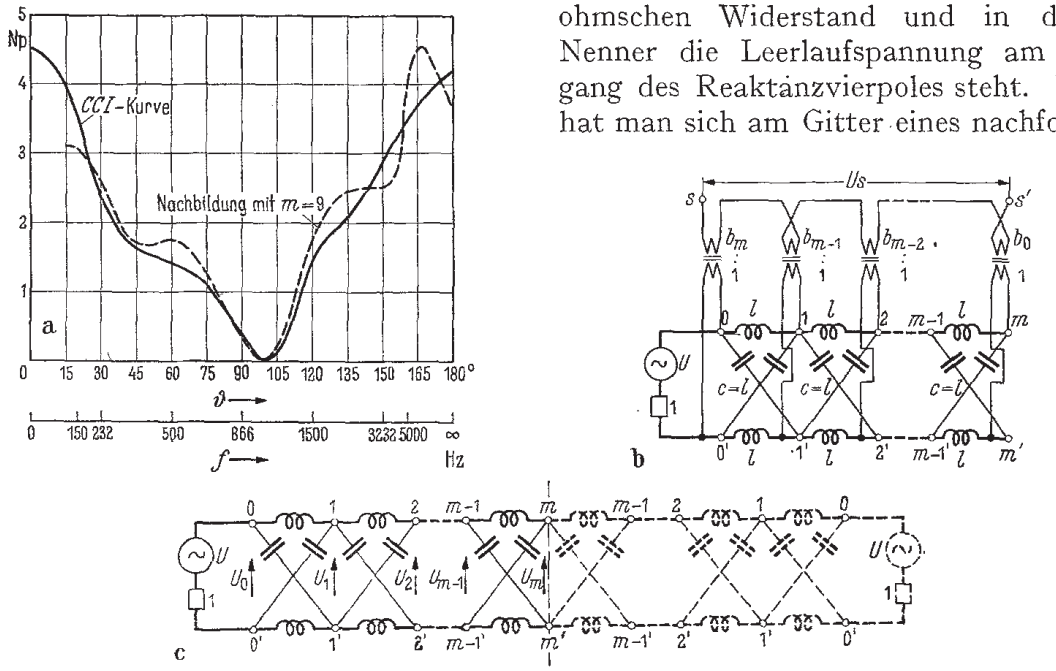


Bild 7. Nachbildung einer Ohrkurve.



den Verstärkers wirkend zu denken. Als Beispiel zeigt Bild 7 die Nachbildung[4] einer Kurve gleicher subjektiver Lautstärkeempfindlichkeit[5] (Ordinate $\ln p/p_0$, wo p_0

Bild 8a bis c. Schaltung nach Lee und Wiener. Nachbildung der CCI-Geräuschbewertungskurve.
$\frac{U_s}{U} = e^{-jm\vartheta}(b_0 + b_1\cos\vartheta + b_2\cos 2\vartheta + \cdots + b_m\cos m\vartheta)$; $\vartheta = 2\,\mathrm{arctg}\,l\omega$; $l = \frac{1}{2\pi\cdot 1050}$.

[1]) H. W. Bode, J. Math. Phys., Mass. Inst. of Techn., Nov. 1934 und Bell. Syst. techn. J. 14 (1935) S. 211.

[2]) Eine zusammenfassende Darstellung der Wellenparametertheorie der Filter mit Beispielen und Berechnungsunterlagen ist in einem demnächst erscheinenden Buch enthalten: W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Bd. 1. Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler Kom.-Ges.

[3]) Vgl. hierzu und zu dem Folgenden: W. Cauer, Telegr.-, Fernspr.-, Funk- und Fernseh-Technik 29 (1940) S. 185 u. 215.

[4]) Der Vierpol Bild 7 hat eine um den konstanten Wert 8,2 Neper kleinere Leerlaufdämpfung, als der gestrichelten Kurve entspricht.

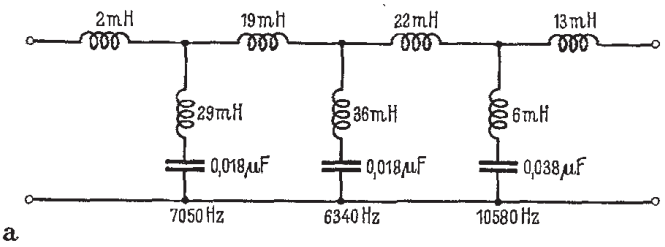
[5]) Kingsbury-Kurve, H. Fletcher u. W. A. Munson, J. acoust. Soc. Amer. 5 (1933) S. 82.

der Schalldruck ist, der dem Schwellwert bei 1000 Hz, und p der Schalldruck, der einer konstanten Lautstärke — im Beispiel 70 Phon — entspricht) als Leerlaufdämpfung eines endlichen Reaktanzvierpoles. Als e^{2A_0} (e^{2A}) realisierbar sind solche und nur solche Funktionen von $x=\omega^2$, die reell, rational und für alle nicht negativen x nur positiver Werte fähig sind (mindestens den Wert 1 haben). Durch solche Funktionen lassen sich irgendwelche stetige (im Positiven verlaufende) Kurven beliebig gut als A (A_0) annähern[1]).

Beliebige Leerlaufdämpfungen A_0 kann man z. B. gemäß der in Bild 8b dargestellten Prinzipschaltung[2]) durch einen Fourier-Reihenabschnitt

$$e^{-A_0}=\left|\frac{U_s}{U}\right|=b_0+b_1\cos\vartheta+\cdots+b_m\cos m\vartheta, \qquad \vartheta=2\,\mathrm{arctg}\,l\omega$$

annähern und gliedweise realisieren. In der Schaltung Bild 8b, in welcher der Generatorwiderstand normiert als 1 angenommen ist, sind die Fourier-Koeffizienten b



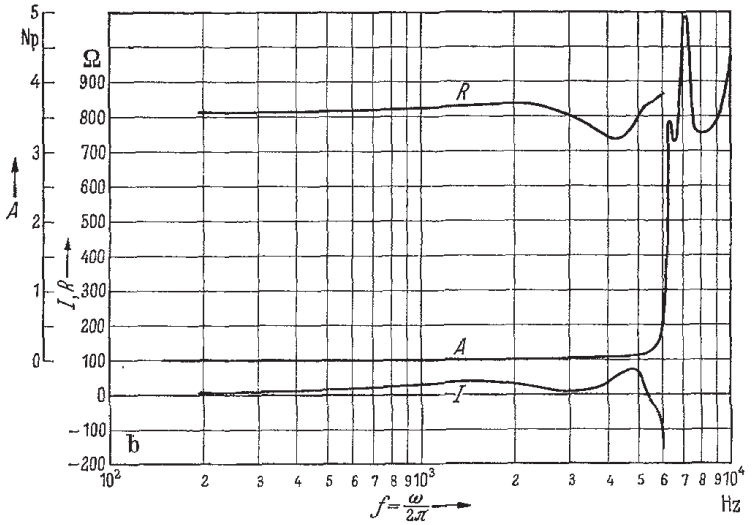


Bild 9a und b. Tiefpaßfilter mit Tschebyscheffscher Betriebsdämpfung.
Echodämpfung im Durchlaßbereich = Betriebsdämpfung im Sperrbereich, $A_{\min}=3{,}15$ Neper, Grenzfrequenz $f_1=6000$ Hz, $\varkappa=0{,}95$, $R=800\,\Omega$.

als Übersetzungsverhältnisse idealer Übertrager verwirklicht. Die Wirkungsweise der Schaltung kann man sich durch die mittels Spiegelung verdoppelte Schaltung Bild 8c verdeutlichen, die in der linken Hälfte die gleiche Stromverteilung aufweist wie die Schaltung Bild 8b. Als Beispiel wurde eine vom CCI vereinbarte Geräuschbewertungskurve[3]) mit $m=9$ nachgebildet (Bild 8a). Grundsätzlich kann man mit den Schaltungen von Lee und Wiener auch als Sonderfall irgendwelche Filterkurven realisieren. Jedoch ist der Aufwand größer als derjenige nach anderen Verfahren.

Ein weiteres Beispiel eines Reaktanzvierpoles mit vorgeschriebener Leerlaufdämpfung ist das eines ausgangsseitig leerlaufenden Rundfunkbandfilters mit Tschebyscheffschem Verhalten der Leerlaufdämpfung[4]).

[1]) Dies läßt sich mittels des Weierstraßschen Approximationssatzes zeigen.

[2]) Y. W. Lee u. N. Wiener, U. S. Patente Nr. 2024900, 2124599, 2128257 sowie a. a. O., Fußnote 1, S. 691 und Fußnote 3, S. 695.

[3]) Comité consult. Int. Tél. (C.C.I.F.) XI. Assemblée Plénière Juni 1936, Teil II, S. 20.

[4]) W. Cauer, Elektr. Nachr.-Techn. 16 (1939) S. 161.

Bild 9a zeigt für den Fall Echodämpfung im Durchlaßbereich = Betriebsdämpfung im Sperrbereich einen kettenartigen Tiefpaß mit Tschebyscheffschem Verhalten der Betriebsdämpfung[1]). In Bild 9b ist die gemessene Betriebsdämpfung und der Real- und Imaginärteil des gemessenen Betriebswiderstandes dargestellt (für die rechnerische Betriebsdämpfung liegt bei Tschebyscheffschem Verhalten das zweite Minimum nicht höher, sondern genau so hoch wie das erste). Unter Betriebswiderstand W_b eines Vierpoles ist der am Eingang gemessene Scheinwiderstand zu verstehen, wenn der Ausgang mit dem Verbraucherwiderstand R belastet ist. Unter Echoübertragungsmaß, dessen Realteil die Echodämpfung ist, versteht man unter der Annahme eines konstanten ohmschen Generatorwiderstandes R den Ausdruck $\ln \frac{W_b+R}{W_b-R}$. Die Kettenfilter der Art Bild 6 haben gegenüber den Filtern der Art Bild 9 den Nachteil der spezielleren Parameterbestimmung. Demgegenüber hat man bei den Filtern der Art Bild 6, die auf der Grundlage von Wellenwiderstand und Vierpoldämpfung berechnet werden, den Vorteil, stets mit positiven Schaltelementen, d. h. ohne Gegeninduktivitäten, sowie mit einem bei hohen Filterklassenzahlen wesentlich geringeren Rechenaufwand bei der numerischen Durchrechnung auskommen zu können. Die dem Tschebyscheffschen Verhalten der Betriebsdämpfung zugrunde liegende rein mathematische Aufgabe wurde schon im Jahre 1877 mittels elliptischer Funktionen gelöst[2]).

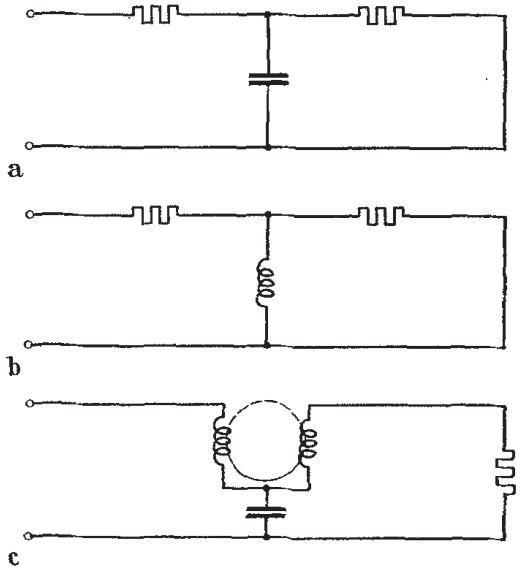


Bild 10a bis c. Umwandlung eines Zweipols in eine Schaltung mit nur einem ohmschen Widerstand.

Dieselbe Mannigfaltigkeit von Funktionen der Frequenz, die sich als Betriebsdämpfung eines Reaktanzvierpoles approximieren oder exakt darstellen läßt, ergibt sich auch für symmetrische Vierpole mit ohmschen Widerständen, die beiderseits gleichen konstanten ohmschen Betriebswiderstand R haben. Solche Vierpole erhält man, wenn man die Zweipole des Kreuzgliedes Bild 4a zueinander dual wählt ($Z_2 = R^2/Z_1$). Für die Betriebsdämpfung A eines solchen Vierpoles hat man nämlich $e^{2A} = \left|\frac{Z_2+R}{Z_2-R}\right|^2$. Dieser Ausdruck hat gerade die vorher erwähnte Eigenschaft, eine reelle rationale Funktion von x zu sein, die für positive $x = \omega^2$ niemals kleiner als 1 sein kann, und umgekehrt läßt sich zeigen, daß es zu solchen Funktionen immer durch Zweipole [z. B. nach Brune[3])] realisierbare Scheinwiderstände Z_1 und Z_2 gibt. Man hat damit eine allgemeine systematische Methode, eine Kurve, die in einem vorgegebenen Frequenzintervall als beliebige positive stetige Funktion verläuft, mit jeder gewünschten Genauigkeit als Dämpfung eines symmetrischen Vierpoles konstanten Betriebswiderstandes zu realisieren[4]). Der Fortschritt einer solchen Methode gegenüber den älteren, heute noch vielfach gebräuchlichen, etwa aus dem Jahre 1928 stammenden Verfahren[5]) liegt auf der Hand. Diese beschränken sich auf eine mit zugehörigen Dämpfungskurven versehene Beispielsammlung von besonderen Kreuzgliedern und

[1]) H. Piloty, Telegr.-, Fernspr.-, Funk- u. Fernseh-Technik 28 (1939) S. 363.

[2]) Vgl. eine in der Z. angew. Math. Mech. erscheinende „Bemerkung über eine Extremalaufgabe von E. Zolotareff" des Verfassers.

[3]) Vgl. Fußnote 2, S. 692.

[4]) Vgl. Fußnote 3, S. 695.

[5]) O. J. Zobel, Bell. Syst. techn. J. 7 (1928) S. 438. — V. Gandtner u. G. Wohlgemuth, Wiss. Veröff. Siemens-Werk. 7 (1929) S. 67.

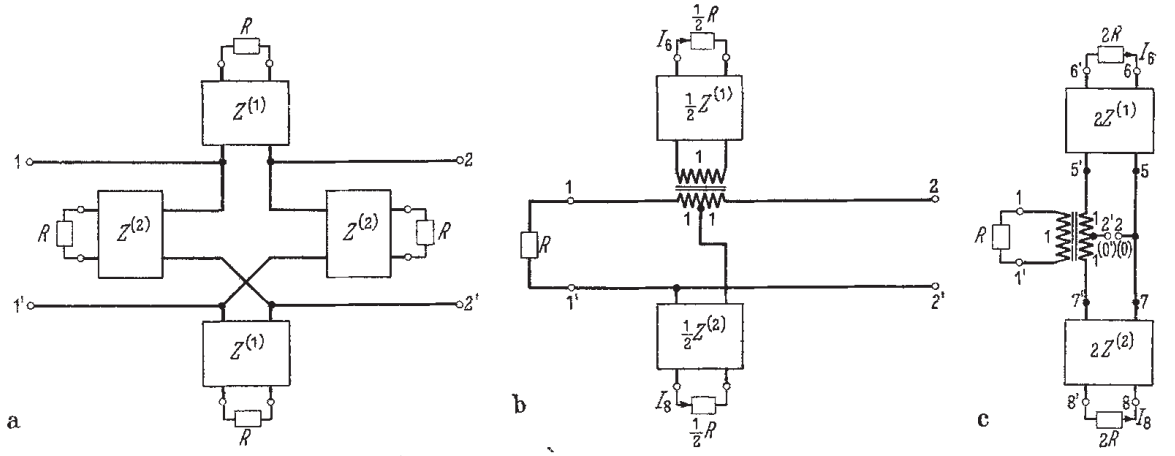


Bild 11a bis c. Brückenartige Frequenzweichen.

verwandten Schaltungen, aus denen man durch Probieren einige herauszusuchen und in Kette zu schalten hat, um eine vorgegebene Dämpfungskurve zu erhalten, dabei aber nie weiß, ob die Aufgabe überhaupt mit den vorhandenen Mitteln lösbar ist.

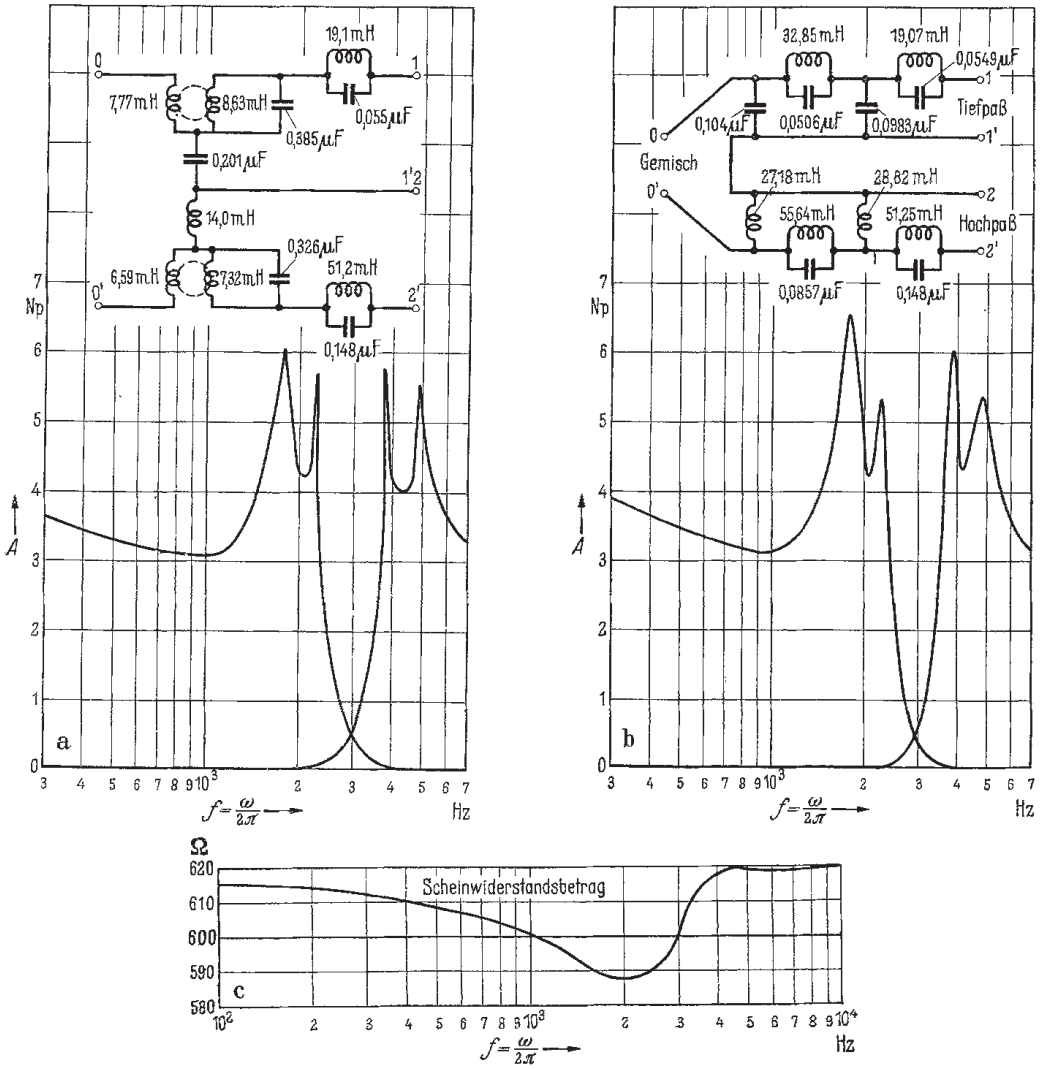
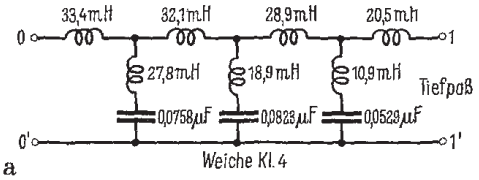


Bild 12a bis c. Frequenzweichen konstanten Betriebswiderstandes.

Wir wenden uns jetzt von den vierpoligen Reaktanzschaltungen vorgeschriebenen Dämpfungsverhaltens zu den sechspoligen Frequenzweichen konstanten Betriebswiderstandes R, die ein Frequenzgemisch, das an einem Klemmenpaar (0,0′)

zugeleitet wird, derart nach zwei weiteren Klemmenpaaren (1,1′) und (2,2′) hin trennen, daß alle die Energie, die nicht nach (1,1′) durchgelassen wird, nach (2,2′) geht und umgekehrt, dagegen nichts bei 0,0′ reflektiert wird (wegen des bei 0,0′ mit dem Generatorwiderstand R übereinstimmenden konstanten Betriebswiderstandes). Den Übergang vermittelt uns der folgende merkwürdige Satz: Jeder Zweipol aus Induktivitäten, Gegeninduktivitäten, ohmschen Widerständen und Kapazitäten ist äquivalent zu einem anderen solchen Zweipol mit nur einem einzigen ohmschen Widerstand oder, was dasselbe ist, zu einem Reaktanzvierpol, der mit einem ohmschen Widerstand abgeschlossen ist. In Bild 10a und b sind als Beispiele zwei Realisierungen einer allgemeinen lineargebrochenen Scheinwiderstandsfunktion dargestellt. Immer ist entweder die eine oder die andere möglich. Bild 10c zeigt eine Schaltung mit einer größeren Zahl von Reaktanzelementen, aber mit nur einem einzigen ohmschen Widerstand. Es läßt sich nachweisen, daß diese Zweipolschaltung oder ihre Grenzfälle stets entweder zur Schaltung Bild 10a oder zur Schaltung Bild 10b äquivalent sind.

Zu den brückenartigen Frequenzweichen konstanten Betriebswiderstandes gelangt man nun, wenn man von dem Kreuzglied mit paarweise gleichen zueinander dualen Zweipolen ausgeht und sie äquivalent durch Reaktanzvierpole mit angehängtem ohmschen Widerstand ersetzt. Man erhält so die Schaltung Bild 11a, in der mit $Z^{(1)}$ zwei gleiche oder äquivalente Reaktanzvierpole, z. B.



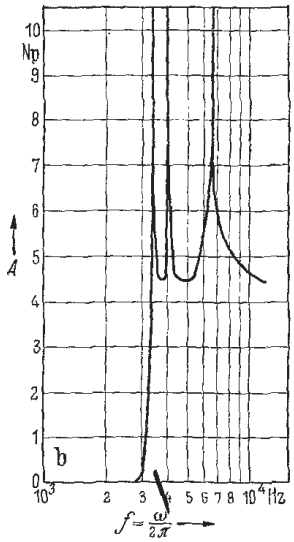


Bild 13a u. b. Weiche Kl. 4 mit Tschebyscheffschem Verhalten der Betriebsdämpfung.

Tiefpässe, und mit $Z^{(2)}$ zwei untereinander ebenfalls gleiche oder äquivalente, aber zu den ersten duale Reaktanzvierpole bezeichnet sind, z. B. Tiefpässe mit gleicher Durchlaß- und Sperreigenschaft wie die erstgenannten Tiefpässe. Nach Übergang zu den entsprechenden Sparbrückenschaltungen Bild 11b und c ergibt die Reihen- oder Parallelschaltung der Reaktanzvierpolausgänge eine elektrische Weiche der erwähnten Art.

Zu solchen brückenartigen Weichen gibt es unter gewissen Voraussetzungen, z. B., wenn die in der Brücke vorkommenden Reaktanzvierpole symmetrisch sind, äquivalente sechspolige Weichen, die aus Vornreihen- oder Vornparallelschaltungen zweier Vierpole bestehen. In Bild 12a[1]) und b sind zwei solche zu einer Brückenweiche und zueinander äquivalente vornreihengeschaltete Weichen mit ihren gemessenen Betriebsdämpfungskurven dargestellt. Bild 12c zeigt den gemessenen Verlauf des Scheinwiderstandsbetrages des Betriebswiderstandes an den Klemmen 0,0′ der Weiche Bild 12a, welcher der Berechnung nach konstant gleich 600 Ω sein sollte. Derartige Weichen kann man auch mit Tschebyscheffschem Verhalten der Betriebsdämpfung herstellen[2]). Bild 13a zeigt dafür als Beispiel den Tiefpaß-Teilvierpol einer derartigen Tief-Hochweiche, die aus zwei vornparallelgeschalteten Reaktanzvierpolen besteht. In Bild 13b ist die rechnerische Betriebsdämpfung nach der Tiefseite hin dargestellt. Die mathematische Aufgabe ist dieselbe wie für die vierpoligen Filter mit Tschebyscheffschem

[1]) W. Brandt, Elektr. Nachr.-Techn. 13 (1936) S. 111.
[2]) W. Cauer, Elektr. Nachr.-Techn. 16 (1939) S. 96.

Verhalten der Betriebsdämpfung[1]). Die sechspoligen Weichen der in Bild 12 und 13 dargestellten Art haben eine Reihe von interessanten Eigenschaften. Eine ist die, daß man jedem symmetrischen Reaktanzvierpol bis auf Äquivalenz eine Weiche eindeutig so zuordnen kann, daß die Betriebsübertragungsmaße der Weiche zwischen 0,0′ und 1,1′ und 0,0′ und 2,2′ bzw. mit dem Betriebsübertragungsmaß und dem Echoübertragungsmaß des Reaktanzvierpoles für alle Frequenzen übereinstimmen.

Die angeführten Beispiele geben ein ungefähres Bild von der technischen Tragweite der Theorie und von der Art der durch sie vermittelten grundsätzlichen Ergebnisse. Zu ihrem Wesen gehört zunächst, wie schon eingangs betont wurde, die Behandlung der Frequenzfunktionen als im Komplexen differenzierbare Funktionen mit den Hilfsmitteln der Funktionentheorie. Wesentlich ist bei der Lösung einer Aufgabe, daß nicht sofort die Struktur der Schaltung ins Auge gefaßt wird, sondern von den Eigenschaften, z. B. beim Vierpol von seinen Leerlaufwiderständen, ausgegangen wird. Nachdem man weiß, was für Frequenzfunktionen (z. B. Scheinwiderstandsfunktionen) man durch Schaltungen realisieren kann, läuft die betreffende technische Aufgabe mathematisch auf ein Approximationsproblem oder Interpolationsproblem für die als realisierbar erkannten Frequenzfunktionen hinaus. Erst nach Lösung des betreffenden Approximations- oder Interpolationsproblems wird die Frage der Realisierung durch eine bestimmte Schaltungsstruktur vorgenommen. Diese letzte Aufgabe ist sehr vieldeutig. Man wird somit schließlich auf die Fragen der Äquivalenz geführt, welche die Theorie ebenfalls weitgehend allgemein beantworten konnte[2]).

Zusammenfassung.

Eine Reihe von charakteristischen Beispielen für die Theorie der linearen Wechselstromschaltungen (Netzwerke) werden behandelt: Schwingbedingung für gegengekoppelte Verstärker, Berechnung des Imaginärteiles aus dem Realteil eines Scheinwiderstandes, Reaktanztheorem, symmetrischer Vierpol, vierpolige Kabelnachbildung, kettenförmige Bandfilter mit Tschbeyscheffscher Vierpoldämpfung, Nachbildung einer Kurve gleicher subjektiver Lautstärkeempfindlichkeit durch einen ausgangsseitig leerlaufenden Reaktanzvierpol, Nachbildung der CCI-Geräuschbewertungskurve nach einer Methode von Lee und Wiener, ein ausgangsseitig leerlaufendes Rundfunkbandfilter, eine Tiefpaßkette mit Tschebyscheffschem Verhalten der Betriebsdämpfung, sechspolige Frequenzweichen konstanten Betriebswiderstandes, Realisierung einer allgemeinen lineargebrochenen Funktion durch einen Zweipol mit nur einem ohmschen Widerstand. In Zusammenhang mit diesen Beispielen werden Beispiele rein schaltungstheoretischer ohne Formelapparat faßbarer Begriffe und Sätze erläutert, u. a.: Äquivalenz; Dualität; Realisierbarkeit beliebiger stetiger Funktionen als Dämpfungskurven, auch mittels Schaltungen beiderseits konstanten Betriebswiderstandes; Realisierbarkeit jeder Scheinwiderstandsfunktion durch einen Zweipol, der nur einen ohmschen Widerstand enthält. Für die Theorie kennzeichnend sind folgende Punkte: Behandlung der Frequenzfunktion als im Komplexen differenzierbare Funktionen mit den Hilfsmitteln der Funktionentheorie; nicht die Struktur der Schaltungen, sondern ihre Eigenschaften sind das Primäre; Feststellung, welche Funktionen der Frequenz durch Zweipole und Vierpole realisierbar sind; Formulierung der technischen Aufgabe als Approximationsaufgabe für die als realisierbar erkannten Frequenzfunktionen; Untersuchung der Frage der Äquivalenz. Der Aufsatz verzichtet fast vollständig auf mathematische Entwicklungen und bringt lediglich in knapper Form einige Ergebnisse.

[1]) Vgl. Fußnote 2, S. 697.

[2]) Wegen einer ausführlichen Darstellung der Theorie sei auf das in der Akademischen Verlagsgesellschaft Becker & Erler Kom.-Ges. erscheinende Buch des Verfassers verwiesen (vgl. Fußnote 2, S. 695).